**Решение прикладных задач с помощью системы линейных уравнений**

Практическое занятие

Специальность: 09.02.07 Информационные системы и программирование

МАТЕМАТИКА

ОПД.10 Численные методы

Тема 6.12.

Практическое занятие № 20.

Решение прикладных задач с помощью системы линейных уравнений.

Преподаватель: Кисова Любовь Ивановна

2023

**Практическое занятие № 20**

**Решение прикладных задач с помощью системы линейных уравнений**

**Методические рекомендации к практическому занятию**

***Теоретический материал***

Пусть дана система трёх линейных алгебраических уравнений

.

Решением такой системы называется набор , , который обращает все уравнения системы в тождества.

Система называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, и называется *несовместной*, если у нее нет ни одного решения.  
Совместная система вида называется *определенной*, если она имеет единственное решение; если у нее есть хотя бы два различных решения, то она называется неопределенной.

В работе рассматриваются наиболее известные и простые в вычислительном плане методы решения квадратных систем линейных уравнений: метод Крамера и метод Гаусса.

**Метод Крамера**

Из коэффициентов при неизвестных составим матрицу А= , а из свободных членов матрицу – столбец В=.

Определитель матрицы А обозначим Δ и назовем определителем системы.

Δ==

Для того чтобы найти , нужно заменить столбец коэффициентов при на столбец свободных членов.

.

Аналогичным способом найдём .

.

По формулам Крамера найдём: .

**Важно!** Если определитель матрицы **A** равен нулю, система не имеет единственного решения, так как матрица вырожденная. Это значит, что одно или несколько уравнений системы являются линейно зависимыми или система уравнений содержит избыточные уравнения.

В результате, невозможно однозначно определить значения неизвестных. Вместо этого, система может иметь бесконечное число решений или не иметь их вовсе.

**Метод Гаусса**

Данный метод заключается в приведении матрицы к треугольной матрице с помощью элементарных преобразований, а именно:

1) умножение или деление коэффициентов и свободных членов на одно и тоже число;

2) сложение и вычитание уравнений;

3) перестановку уравнений системы;

4) исключение из системы уравнений, в которых все коэффициенты при неизвестных и свободные члены равны нулю.

**Помни!** Треугольная матрица - это тип квадратной матрицы, в которой все значения находятся в верхнем правом или нижнем левом углу матрицы, а остальные элементы заполнены нулевыми значениями. Такие матрицы называются верхними треугольными или нижними треугольными соответственно.

**Метод обратной матрицы**

В матричной форме систему линейных уравнений можно записать так: АХ=В, где А– матрица коэффициентов системы; Х – матрица-столбец неизвестных; В – матрица-столбец свободных членов. Если А квадратная матрица, то обратной по отношению к А называется матрица, которая, будучи умноженной на А дает единичную матрицу.А-1А=АА-1=Е.

Обратная матрица находится по формуле А-1=

Из коэффициентов при неизвестных составим матрицу А=

Далее, чтобы найти матрицу, обратную матрице А нужно:

1) найти алгебраические дополнения:

(то есть из нашей основной матрицы вычёркиваем 1 строку и 1 столбец);

(то есть из нашей основной матрицы вычёркиваем 1 строку и 2 столбец);

(то есть из нашей основной матрицы вычёркиваем 1 строку и 2 столбец);

;

;

;

.

2) найти определитель матрицы Δ (алгоритм прописан в методе Крамера);

3) найти обратную матрицу А-1;

4) найти произведение обратной матрицы на матрицу свободных членов, т.е. А-1 В (В=.;

3) пользуясь определением обратных матриц, записать ответ Х=А-1В

***Практический материал***

**Решение задач с практическим применением**

Российская крупная компания по разработке программного обеспечения (ПО) для беспилотных летательных аппаратов (БПЛА) разрабатывает лицензионное ПО для БПЛА - 1, БПЛА – 2 и БПЛА – 3. Известно количество лицензий для БПЛА, проданных за три дня и сумма вырученных денежных средств от их продажи. Найти цену 1 лицензии каждого вида.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| День | Количество лицензий (единиц) | | | Сумма вырученных средств  (тыс. ден. ед) |
| БПЛА-1 | БПЛА – 2 | БПЛА – 3 |
| I | 30 | 20 | 20 | 160 |
| II | 10 | 30 | 10 | 90 |
| III | 50 | 30 | 40 | 290 |

Как известно, решение прикладной задачи ведётся по известной трехэтапной схеме: формализация, математизация, интерпретация.

Решение: 1 этап (формализация). Пусть х (тыс. ден. ед) – сумма вырученных средств от продажи одной лицензии для БПЛА - 1, у - сумма вырученных средств от продажи одной лицензии для БПЛА - 2, z - сумма вырученных средств от продажи одной лицензии для БПЛА - 3.

Зная суммы вырученных средств и количество проданных лицензий за каждый день, составим систему линейных уравнений:

2 этап (математизация).

1) Решим **методом Крамера.**

=;

Тогда .

2) Решим систему посредством **метода Гаусса.**

Запишем расширенную матрицу .

Разделим все строки матрицы на 10. Получим матрицу .

Поменяем местами первую и вторую строку: .

Из второй строки вычтем первую строку, умноженную на 3, результат запишем во вторую строку: .

Из третьей строки вычтем первую строку, умноженную на 5, результат запишем в третью строку: .

Разделим вторую строку на (-7), третью строку на (-12): .

Из третьей строки вычтем вторую строку, результат запишем в третью строку: .

*Прямой ход завершён.*

Выполним *обратный ход* с помощью последовательных подстановок.

Из третьей строки:

Из второй строки:

Из первой строки:

3 этап (интерпретация):

Цена одного лицензионного программного продукта для БПЛА - 1 2 тысячи денежных единиц, для БПЛА- 2 1 тысяча денежных единиц и для БПЛА – 3 4 тысячи денежных единиц.

**Применение средств табличного редактора к решению систем линейных уравнений**

С ростом числа переменных в системе, её решение усложняется и становится почти невозможным для вычислений «вручную». В таких случаях все вычисления производят с помощью современных вычислительных средств и компьютерных программ.

Одним из таких средств является онлайн – редактор Яндекс. Документы.

Зайдите в данный редактор, выберите «Создать» - «Таблицы». Здесь есть функции для работы с матрицами: МОБР( параметр) - обращение матрицы; МОПРЕД (параметр)- вычисление определителя; МУМНОЖ( список параметров)- умножение матриц.

Решим нашу систему линейных алгебраических уравнений **по формулам Крамера**:

1. Разместите на рабочем листе основную матрицу данной вам системы и вспомогательные матрицы, оформите таблицу для нахождения определителей и переменных (рисунок 1);

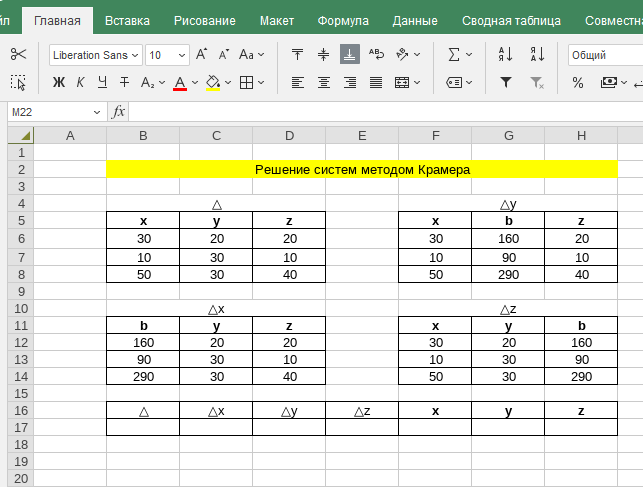


рисунок 1. Подготовка таблиц

1. Примените функцию МОПРЕД (матрица), вычислить определители всех матриц: в ячейке В17 введите «=МОПРЕД» и выделите ячейки первой таблицы с численными значениями, соответствующие B6:D8 (рисунок 2), нажмите клавишу Enter. Аналогичным образом найдите определители △x, △y, △z (рисунок 3);

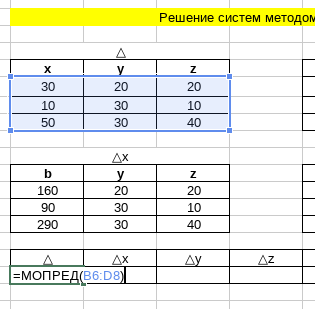


рисунок 2. Вычисление главного определителя

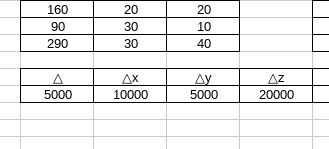


рисунок 3. Вычисление определителей

1. По формулам Крамера найдите решение системы, введя в ячейки формулы (рисунок 4). Аналогичным способом найдите остальные переменные.

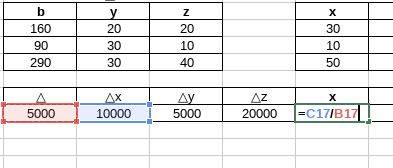


рисунок 4. Вычисление переменной х

Решим нашу систему линейных алгебраических уравнений **методом Гаусса**:

1. Откройте Лист 2. Оформите таблицы по образцу (рисунок 5).

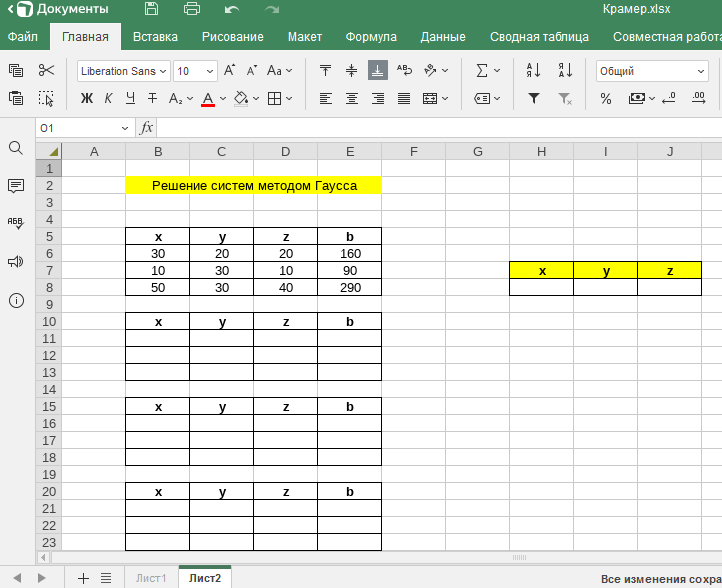


рисунок 5. Подготовка таблицы к решению СЛАУ методом Гаусса

2. **Задача 1. В ячейке В6 получить единицу.**

Выделите первую пустую строку второй таблицы, введите знак «=», выделите первую строку с численными значениями первой таблицы, знак «/», выделите ячейку В6 (рисунок 6). Нажмите комбинацию клавиш <Ctrl>+ <Shift> + <Enter>. Таким образом у вас заполнится весь выделенный массив.

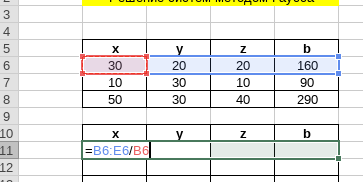


рисунок 6. Задача 1

3. Работа с таблицей 2. **Задача 2. В первом столбце под единицей получить нули: из второй (третьей) строки первой таблицы нужно вычесть полученную первую строку второй таблицы, умноженную на значение ячейки В7 (В8).**

Выделите вторую пустую строку второй таблицы, нажмите «=», выделите массив В7:Е7, введите знак «-», выделите массив В11:Е11, введите знак «\*», нажмите на ячейку В7 (рисунок 7). Нажмите комбинацию клавиш <Ctrl>+ <Shift> + <Enter>. Самостоятельно получите численные значения массива В8:Е8. Сравните значения со значениями на рисунке 8.

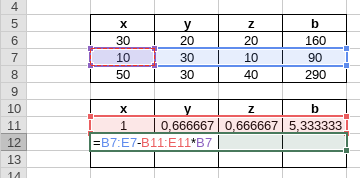


рисунок 7. Задача 2

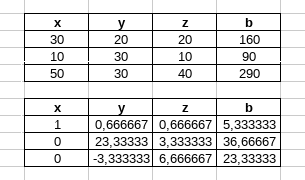


рисунок 8. Таблица 2

4. Работа с таблицей 3. **Задача:** **Получить треугольную матрицу.**

* Выделите первую пустую строку третьей матрицы, нажмите знак «=», выделите массив В11:Е11 (рисунок 9). Нажмите комбинацию клавиш <Ctrl>+ <Shift> + <Enter>.

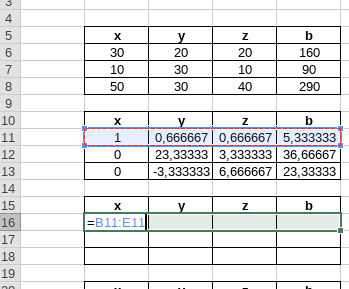


рисунок 9. Заполнение первой строки третьей таблицы

* Выделите вторую строку третьей таблицы, нажмите знак «=», выделите массив В11:Е11, введите знак «/», укажите ячейку С12 (рисунок 10). Нажмите комбинацию клавиш <Ctrl>+ <Shift> + <Enter>.

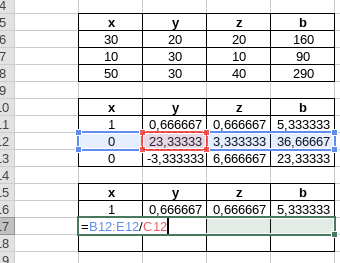


рисунок 10. Получение в ячейке С17 единицы

* Выделите третью строку третьей таблицы, нажмите знак «=», выделите массив В13:Е13, введите знак «-», выделите массив В17:Е17, введите знак «\*», нажмите на ячейку С13 (рисунок 11). Нажмите комбинацию клавиш <Ctrl>+ <Shift> + <Enter>.

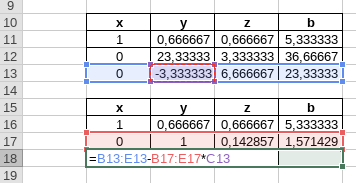


рисунок 11. Обнуление ячейки С18

* Сравните полученные значения со значениями таблицы на рисунке 12.

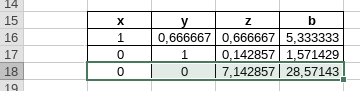


рисунок 12. Значения третьей таблицы

5. Работа с таблицей 4. **Задача: в ячейке D18 получить единицу.**

Выполните данную задачу по рисунку 13. Нажмите комбинацию клавиш <Ctrl>+ <Shift> + <Enter>.

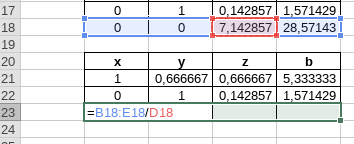


рисунок 13. Заполнение четвёртой таблицы

6. Заполните таблицу со значениями переменных по образцу (рисунки 14-16).

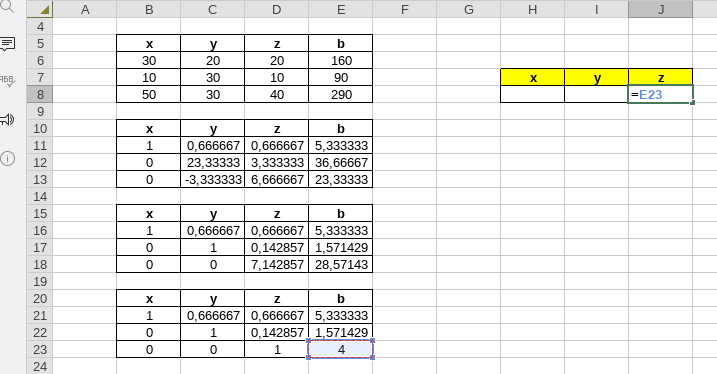


рисунок 14. Значение переменной z

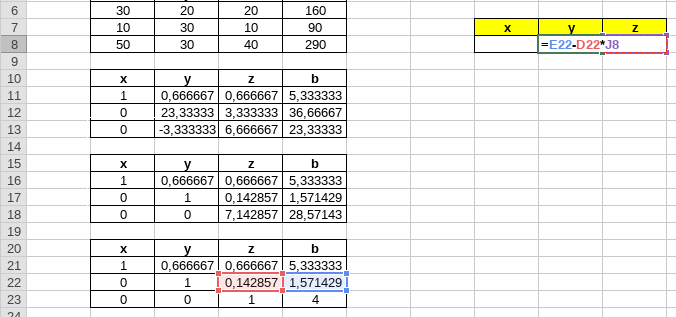


рисунок 15. Значение переменной y

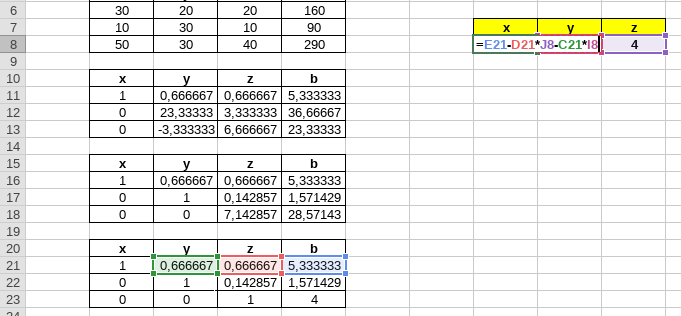


рисунок 16. Значение переменной x

В итоге получаем x=2, y=1, z=4.

Для решения системы уравнений **методом матрицы, обратной данной** при помощи онлайн сервиса Яндекс.Документы нужно:

* в диапазон ячеек таблицы ввести матрицу А, состоящую из коэффициентов системы и матрицу В свободных членов;
* выделить в свободном столбце диапазон ячеек равный числу переменных в системе и ввести в него формулу = МУМНОЖ(МОБР(А);В);
* нажать сочетание клавиш <Ctrl>+ <Shift> + <Enter>;в выделенном диапазоне появятся ответы.

**Список использованной литературы:**

1. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. 1 часть. – 3-е изд. – М.: Айрис – пресс, 2004. – 288с.:ил.
2. Колдаев В. Д. Численные методы и программирование: учебное пособие/Под ред. Проф. Л.Г.Гагариной. – М.: ИД «ФОРУМ»: ИНФРА- М, 2008. -336с.
3. Фёдорова О.Н. Методическая система профессионально-ориентированного обучения математике в колледжах технического профиля. Диссертация на соискание ученой степени кандидата педагогических наук. Ярославль. 2016. – 268с.
4. Решение системы уравнений в Microsoft Excel. – Режим доступа -https://lumpics.ru/how-solve-system-equations-excel/?ysclid=lo637za1ej823228124